Lógica Computacional, 2025-2
Unidad 3: Lógica de Predicados

Ejemplo de Forma Clausular

Manuel Soto Romero

18 de mayo de 2025
Facultad de Ciencias UNAM

Sea $\varphi = \forall z(\exists x(R(x,z) \wedge R(z,x)) \to \neg\exists w(\forall x R(x,w) \to R(z,w)))$ encontrar su forma clausular.

Solución:

1. Rectificación $\texttt{rec}(\varphi)$

   - Observamos que existen dos cuentificadores de la misma variable con alcances ajenos.

   $$\varphi = \forall z\left(\boxed{\exists x}(R(x,z) \wedge R(z,x)) \to \neg\exists w\left(\boxed{\forall x} R(x,w) \to R(z,w)\right)\right)$$

   - Como $y \notin FV(\varphi)$ podemos aplicar la equivalencia $\exists x \varphi \equiv \exists y\,(\varphi[x := y])$ para que tengan nombres de variables distintos.

   $$\varphi = \forall z\left(\boxed{\exists y}\left(R\left(\boxed{y}, z\right) \wedge R\left(z, \boxed{y}\right)\right) \to \neg\exists w(\forall x R(x,w) \to R(z,w))\right)$$

   $$\therefore \varphi_1 = \texttt{rec}(\varphi) = \forall z\left(\exists y\left(R(y,z) \wedge R(z,y)\right) \to \neg\exists w(\forall x R(x,w) \to R(z,w))\right)$$

2. Forma Normal Negativa $\texttt{fnn}(\varphi_1)$

   - Observamos que la operación principal es una implicación.

   $$\forall z\left(\exists y\left(R(y,z) \wedge R(z,y)\right) \boxed{\to} \neg\exists w(\forall x R(x,w) \to R(z,w))\right)$$

   - Eliminamos la implifcación usando la equivalencia $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$.

   $$\forall z\left(\neg\exists y\left(R(y,z) \wedge R(z,y)\right) \vee \neg\exists w(\forall x R(x,w) \to R(z,w))\right)$$

   - Observamos otra implifcación en el lado derecho.

   $$\forall z\left(\neg\exists y\left(R(y,z) \wedge R(z,y)\right) \vee \neg\exists w\left(\forall x R(x,w) \boxed{\to} R(z,w)\right)\right)$$

   - Eliminamos la implifcación usando la equivalencia $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$.

   $$\forall z\left(\neg\exists y\left(R(y,z) \wedge R(z,y)\right) \vee \neg\exists w(\neg\forall x R(x,w) \vee R(z,w))\right)$$

   - Observamos tres negaciones que afectan a cuantificadores.

   $$\forall z\left(\boxed{\neg}\exists y\left(R(y,z) \wedge R(z,y)\right) \vee \boxed{\neg}\exists w\left(\boxed{\neg}\forall x R(x,w) \vee R(z,w)\right)\right)$$

- Aplicamos las equivalencias $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$ y $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$.

$$\forall z\left(\forall y\neg\left(R\left(y,z\right)\wedge R\left(z,y\right)\right)\vee\forall w\neg(\exists x\neg R(x,w)\vee R(z,w))\right)$$

- Observamos dos negaciones que se pueden introducir.

$$\forall z\left(\forall y\boxed{\neg}\left(R\left(y,z\right)\wedge R\left(z,y\right)\right)\vee\forall w\boxed{\neg}(\exists x\neg R(x,w)\vee R(z,w))\right)$$

- Aplicamos las equivalencias $\neg(\varphi\wedge\psi)\equiv\neg\varphi\vee\neg\psi$ y $\neg(\varphi\vee\psi)\equiv\neg\varphi\wedge\neg\psi$.

$$\forall z\left(\forall y\left(\neg R\left(y,z\right)\vee\neg R\left(z,y\right)\right)\vee\forall w(\neg\exists x\neg R(x,w)\wedge\neg R(z,w))\right)$$

- Volvemos a tener una negación que afecta a un cuantificador.

$$\forall z\left(\forall y\left(\neg R\left(y,z\right)\vee\neg R\left(z,y\right)\right)\vee\forall w\left(\boxed{\neg}\exists x\neg R(x,w)\wedge\neg R(z,w)\right)\right)$$

- Aplicamos la equivalencia $\neg\exists x\varphi\equiv\forall x\neg\varphi$.

$$\forall z\left(\forall y\left(\neg R\left(y,z\right)\vee\neg R\left(z,y\right)\right)\vee\forall w(\forall x\neg\neg R(x,w)\wedge\neg R(z,w))\right)$$

- Observamos una doble negación.

$$\forall z\left(\forall y\left(\neg R\left(y,z\right)\vee\neg R\left(z,y\right)\right)\vee\forall w\left(\forall x\boxed{\neg\neg}R(x,w)\wedge\neg R(z,w)\right)\right)$$

- Aplicamos la equivalencia $\neg\neg\varphi\equiv\varphi$.

$$\forall z\left(\forall y\left(\neg R\left(y,z\right)\vee\neg R\left(z,y\right)\right)\vee\forall w(\forall xR(x,w)\wedge\neg R(z,w))\right)$$

$$\therefore \varphi_2=\texttt{fnn}(\varphi_1)=\forall z\left(\forall y\left(\neg R\left(y,z\right)\vee\neg R\left(z,y\right)\right)\vee\forall w(\forall xR(x,w)\wedge\neg R(z,w))\right)$$

3. Forma Normal Prenex $\texttt{fnp}(\varphi_2)$

- Observamos todos los cuantificadores internos

$$\forall z\left(\boxed{\forall y}\left(\neg R\left(y,z\right)\vee\neg R\left(z,y\right)\right)\vee\boxed{\forall w}\left(\boxed{\forall x}R(x,w)\wedge\neg R(z,w)\right)\right)$$

- Aplicamos la equivalencia $\varphi\star\forall x\equiv\forall x(\varphi\star\psi)$ repetidas veces, hasta obtener la forma factorizada.

$$\forall z\left(\forall y\left(\neg R\left(y,z\right)\vee\neg R\left(z,y\right)\right)\vee\forall w\boxed{\forall x}(R(x,w)\wedge\neg R(z,w))\right)$$

$$\forall z\boxed{\forall y}\left(\left(\neg R\left(y,z\right)\vee\neg R\left(z,y\right)\right)\vee\forall w\forall x(R(x,w)\wedge\neg R(z,w))\right)$$

$$\forall z\forall y\boxed{\forall w}\left(\left(\neg R\left(y,z\right)\vee\neg R\left(z,y\right)\right)\vee\forall x(R(x,w)\wedge\neg R(z,w))\right)$$

$$\forall z\forall y\forall w\boxed{\forall x}\left(\left(\neg R\left(y,z\right)\vee\neg R\left(z,y\right)\right)\vee(R(x,w)\wedge\neg R(z,w))\right)$$

$$\therefore \varphi_3=\texttt{fnp}(\varphi_2)=\forall z\forall y\forall w\forall x\left(\left(\neg R\left(y,z\right)\vee\neg R\left(z,y\right)\right)\vee(R(x,w)\wedge\neg R(z,w))\right)$$

4. Forma Normal de Skolem $\texttt{fns}(\varphi 3)$

- Al no haber cuantificadores, únicamente debemos obtener la forma normal conjuntiva de la matriz. En este caso, podemos aplicar distribuitibidad.

$$\left(\left(\neg R\left(y,z\right)\vee\neg R\left(z,y\right)\right)\vee(R(x,w)\wedge\neg R(z,w))\right)$$

$$(\left(\neg R\left(y,z\right)\vee\neg R\left(z,y\right)\right)\vee R(x,w))\wedge(\left(\neg R\left(y,z\right)\vee\neg R\left(z,y\right)\right)\vee\neg R(z,w))$$

$$\therefore \varphi_4 = \mathtt{fns}(\varphi_3) = \forall z \forall y \forall w \forall x((\neg R(y,z) \lor \neg R(z,y)) \lor R(x,w)) \land ((\neg R(y,z) \lor \neg R(z,y)) \lor \neg R(z,w))$$

5. Forma Clausular $Cl(\varphi_4)$

   - Separamos la matriz en cláusulas

$$Cl(\varphi_4) = ((\neg R(y,z) \lor \neg R(z,y)) \lor R(x,w)), ((\neg R(y,z) \lor \neg R(z,y)) \lor \neg R(z,w))$$

   - Renombramos las variables de forma que cada cláusula tenga variables distintas

$$Cl(\varphi_4) = ((\neg R(y,z) \lor \neg R(z,y)) \lor R(x,w)), ((\neg R(u,v) \lor \neg R(v,u)) \lor \neg R(v,s))$$