Lógica Computacional, 2025-2

Unidad 2: Lógica Proposicional

Análisis de Argumentos Correctos

Manuel Soto Romero Luis Fernando Loyola Cruz

24 de febrero de 2025

Facultad de Ciencias UNAM

En esta nota exploraremos la noción de argumento lógico y la corrección de argumentos deductivos dentro del marco de la lógica proposicional. Comenzaremos definiendo formalmente qué es un argumento lógico y qué significa que sea correcto, utilizando la noción de fórmula asociada y el concepto de tautología para verificar su validez. Posteriormente, introduciremos la consecuencia lógica, una herramienta fundamental para determinar si una conclusión se sigue necesariamente de un conjunto de premisas. A través de ejemplos prácticos, veremos cómo demostrar la corrección de argumentos tanto por el método de la fórmula asociada como mediante el análisis de interpretaciones. Finalmente, presentaremos algunas propiedades esenciales de la relación de consecuencia lógica y su importancia en el estudio de la lógica formal, sentando las bases para métodos más avanzados como las pruebas sintácticas y la automatización del razonamiento lógico.

1. Introducción

Ahora que hemos definido la sintaxis y la semántica de las fórmulas de la lógica proposicional, junto con el concepto de tautología, podemos establecer formalmente la definición de argumento lógico e introducir la noción de argumento correcto.

Definición 1. (Argumento Lógico)

Un ***argumento lógico*** *es una secuencia de fórmulas* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$*, denominadas* ***premisas****, y una fórmula* ψ*, llamada* ***conclusión****. Esta secuencia suele representarse como:*

$$\frac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\psi}$$

o bien:

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n / \therefore \psi$$

donde $/ \therefore$ *representa la inferencia lógica de la conclusión a partir de las premisas.*

Un argumento lógico es una estructura que refleja la manera en que justificamos afirmaciones con base en otras ya establecidas. Las premisas son los puntos de partida, es decir, afirmaciones que asumimos como verdaderas dentro del contexto del argumento. A partir de ellas, aplicamos reglas lógicas para llegar a una conclusión.

Por ejemplo, si sabemos que *Si llueve, entonces la calle está mojada* y también sabemos que *Está lloviendo*, podemos concluir que *La calle está mojada*. Aquí, nuestras premisas son *Si llueve, entonces la calle está mojada* y *Está lloviendo*, y la conclusión es *La calle está mojada*.

El objetivo de la lógica es estudiar cuándo estas relaciones entre premisas y conclusiones son correctas, es decir, cuándo la conclusión necesariamente debe ser verdadera si las premisas lo son. Esta definición corresponde a los llamados argumentos deductivos. En contraste, en un argumento inductivo, las conclusiones se aceptan como válidas con base en la observación o la probabilidad. En nuestro estudio, nos enfocaremos exclusivamente en los argumentos deductivos.

De este modo, establecemos la definición formal de un argumento correcto.

Definición 2. (Argumento Correcto)

El argumento $\varphi_1, \ldots, \varphi_n / \therefore \psi$ es ***correcto*** *si y sólo si la siguiente implicación es una tautología:*

$$\vDash (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \psi$$

La fórmula $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \psi$ se denomina ***fórmula asociada*** *al argumento lógico.*

La corrección de un argumento lógico se basa en la idea de que, si todas las premisas son verdaderas, entonces la conclusión también debe serlo en todos los casos posibles. Para verificar esto formalmente, agrupamos las premisas con una conjunción $\wedge$ y analizamos si el condicional $(\varphi_1 \wedge \ldots \varphi_n) \to \psi$ es una tautología, es decir, una fórmula que siempre es verdadera sin importar la asignación de valores de verdad. Si esta condición se cumple, significa que no existe ninguna situación en la que todas las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa, lo que garantiza que el argumento es correcto.

Por lo tanto, verificar la corrección de un argumento equivale a comprobar que su fórmula asociada es una tautología. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1

Supongamos el siguiente argumento lógico:

Si está nublado, entonces llueve. Está nublado. Por lo tanto, llueve

Identificación de proposiciones

- p Está nublado
- q Llueve

Traducción al lenguaje lógico

- La oración *Si está nublado, entonces llueve* se traduce como $p \to q$.
- Las proposiciones restantes son atómicas, por lo que se representan directamente con sus variables.
- Palabras como *por lo tanto*, *así que*, *luego*, *entonces*, *de forma que*, etc., indican la conclusión del argumento.

Escritura del argumento lógico

$$p \to q, p / \therefore q$$

Fórmula asociada

$$((p \to q) \land p) \to q$$

Verificación de tautología mediante interpretaciones

Para que la fórmula no sea una tautología, debería existir una interpretación en la que la premisa sea verdadera y la conclusión falsa. Es decir,

$$\mathcal{I}(((p \to q) \land p) \to q) = 0$$

Esto ocurriría sí:

1. $\mathcal{I}((p \to q) \land p) = 1$
2. $\mathcal{I}(p) = 1$

La primera condición implica que si p es verdadero, entonces q también debe serlo, es decir,

$$\mathcal{I}(p \to q) = \mathcal{I}(1 \to q) = 1$$

Para que esto se cumpla, necesariamente $\mathcal{I}(q) = 1$, lo cual contradice la suposición de $\mathcal{I}(q) = 0$.

Conclusión

Dado que no existe una interpretación en la que la premisa sea verdadera y la conclusión falsa, concluimos que:

$$\models ((p \to q) \land p) \to q$$

Por lo tanto, el argumento es $\boxed{\text{correcto}}$.

Ejercicio 1

Determina si el siguiente argumento lógico es correcto mediante la construcción de su fórmula asociada:

Si el servidor está en mantenimiento, entonces la página web no estará disponible. Si la página web no está disponible, los usuarios recibirán un mensaje de error. Los usuarios no recibieron un mensaje de error. El servidor está en mantenimiento o hubo un problema en la red. Por lo tanto, hubo un problema en la red.

2. Consecuencia lógica

Aunque el método de la fórmula asociada es una herramienta útil para verificar la corrección de un argumento, no es el único enfoque disponible. Existe otro método basado en la noción de consecuencia lógica, el cual establece que un argumento es correcto si y sólo si su conclusión es una consecuencia lógica de sus premisas. Es decir, en lugar de construir una única fórmula y verificar si es una tautología, este enfoque se centra en determinar si, en todas las interpretaciones en las que las premisas son verdaderas, la conclusión también lo es. Este método es fundamental en la lógica formal, ya que permite analizar la corrección de argumentos sin necesidad de expresar todo en términos de una única fórmula lógica.

Definición 2. (Consecuencia Lógica)

Sea Γ un conjunto de fórmulas y sea φ una fórmula. Decimos que φ es una ***consecuencia lógica*** *de Γ si, para toda interpretación $\mathcal{I}$ que satisface a Γ, se cumple que $\mathcal{I}(\varphi) = 1$. Es decir, si cada vez que $\mathcal{I}$ hace verdaderas todas las fórmulas en Γ, entonces necesariamente también hace verdadera a φ. En este caso, escribimos:*

$$\Gamma \vDash \varphi$$

La noción de consecuencia lógica establece que una afirmación φ se deriva de un conjunto de premisas Γ si no existe ninguna forma en la que todas las premisas sean verdaderas y la conclusión es falsa. En otras palabras, φ es una conclusión ineludible siempre que las premisas se cumplan. Este concepto es esencial en la lógica porque permite justificar la corrección de inferencias sin depender de reglas sintácticas específicas, basándose únicamente en el significado de las proposiciones y su relación con las interpretaciones.

Notemos que la relación de consecuencia lógica se expresa mediante una implicación de la forma:

$$\textit{Si } \mathcal{I}(\Gamma) = 1, \textit{ entonces } \mathcal{I}(\varphi) = 1.$$

Esto significa, de manera informal, que todo modelo de Γ es también modelo de φ. Es importante destacar que esta definición no impone ninguna restricción sobre la satisfacibilidad del conjunto Γ; simplemente se asume que Γ es satisfacible y, en tal caso, se prueba que la fórmula φ también lo es bajo la misma interpretación.

Ejemplo 2

Analicemos si el siguiente argumento es correcto:

Si el programa es eficiente, entonces se ejecuta rápidamente. El programa es eficiente o tiene un error. El programa no se ejecuta rápidamente. Por lo tanto, el programa tiene un error.

Formalización

Definimos las siguientes proposiciones:

- ⋆ p: El programa es eficiente.
- ⋆ q: El programa se ejecuta rápidamente.
- ⋆ r: El programa tiene un error.

Expresamos cada premisa en lenguaje lógico:

- ⋆ **Premisa 1:** Si el programa es eficiente, entonces se ejecuta rápidamente.

$$p \to q$$

- ⋆ **Premisa 2:** El programa es eficiente o tiene un error.

$$p \lor r$$

- ⋆ **Premisa 3:** El programa no se ejecuta rápidamente.

$$\neg q$$

- ⋆ **Conclusión:** El programa tiene un error.

$$\therefore r$$

Escritura del argumento lógico

$$p \to q, \quad p \lor r, \quad \neg q \,/\, \therefore r$$

Demostración de $\{p \to q, p \lor r, \neg q\} \vDash r$

Verificamos que la conclusión se deduce lógicamente de las premisas:

1.	$\mathcal{I}(p \to q) = 1$	(Hipótesis)
2.	$\mathcal{I}(p \lor r) = 1$	(Hipótesis)
3.	$\mathcal{I}(\neg q) = 1$	(Hipótesis)
4.	$\mathcal{I}(q) = 0$	(Por 3)
5.	$\mathcal{I}(p) = 0$	(Por 1 y 4)
6.	$\mathcal{I}(r) = 1$	(Por 2 y 5)

Dado que en todas las interpretaciones en las que las premisas son verdaderas, la conclusión también lo es, concluimos que el argumento es **correcto**.

Ejercicio 2

Determina si el siguiente argumento lógico es correcto usando la noción de consecuencia lógica:

Si el usuario introduce una contraseña incorrecta tres veces, su cuenta será bloqueada o se le pedirá verificación adicional. El usuario no pudo acceder a su cuenta. Si la cuenta está bloqueada, el usuario no puede acceder. Si se le pidió verificación adicional, aún puede acceder tras completar el proceso. Por lo tanto, la cuenta del usuario está bloqueada.

3. Propiedades de la Relación de Consecuencia Lógica

La relación de consecuencia lógica cumple las siguientes propiedades:

Reflexividad

$$\textit{Si } \varphi \in \Gamma, \textit{ entonces } \Gamma \vDash \varphi$$

Si en un conjunto de afirmaciones ya está incluida la fórmula φ, entonces es evidente que φ se sigue de Γ. Es como decir que si ya tenemos la afirmación *Está lloviendo*, entonces no necesitamos deducir que *Está lloviendo*; ya lo sabemos.

Principio de Refutación

$$\Gamma \vDash \varphi \textit{ si y sólo si } \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \textit{ es insatisfacible}$$

Decir que $\Gamma \vDash \varphi$ significa que no hay forma de que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. Esto equivale a decir que si agregamos $\neg\varphi$ a Γ, obtenemos una contradicción. Es como afirmar que *Si llueve, la calle se moja* y *Está lloviendo*, pero también *La calle no está mojada*, entonces algo está mal en nuestras premisas.

Transitividad en el Condicional

$$\Gamma \vDash \varphi \to \psi \textit{ si y sólo si } \Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$$

Si sabemos que γ implica que *Si hoy es lunes, mañana es martes*, y además sabemos que hoy es lunes, entonces podemos concluir directamente que mañana es martes. Esta propiedad permite encadenar inferencias lógicas.

Insatisfacibilidad Implica Trivialidad

$$\textit{Si } \Gamma \textit{ es insatisfacible, entonces } \Gamma \vDash \varphi \textit{ para toda } \varphi \in \mathsf{LProp}$$

Si las premisas de un argumento son contradictorias, entonces cualquier conclusión es válida porque partimos de algo falso. Es como si alguien dijera *El sol está hecho de queso y no está hecho de queso al mismo tiempo, por lo tanto,* $2 + 2 = 5$. Como el punto de partida es inconsistente, cualquier cosa podría seguirse.

Insatisfacibilidad y Contradicción

$$\textit{Si } \Gamma \vDash \bot \textit{ entonces } \Gamma \textit{ es insatisfacible}$$

Si a partir de un conjunto de premisas podemos deducir una contradicción ($\bot$), eso significa que esas premisas no pueden ser verdaderas al mismo tiempo, es decir, son insatisfacibles. Es como tener las afirmaciones *Pedro siempre dice la verdad* y *Pedro dijo que está lloviendo* junto con *Pedro dijo que no está lloviendo*; esto no puede ser coherente.

Equivalencia Lógica

$$\varphi \equiv \psi \textit{ si y sólo si } \varphi \vDash \psi \textit{ y } \psi \vDash \varphi$$

Dos proposiciones son equivalentes si cada una se sigue de la otra. Por ejemplo, *No es cierto que Juan no estudió* es lógicamente equivalente a *Juan estudió*. Ambas expresiones significan lo mismo auqnue estén escritas de manera diferente.

Tautologías

$$\models \varphi \textit{ si y sólo si } \varnothing \models \varphi$$

Una tautología es una afirmación que es verdadera sin importar el contexto. Si φ es una tautología, entonces se sigue sin necesidad de premisas ($\varnothing \models \varphi$). Un ejemplo clásico es *Si llueve o no llueve, entonces hace frío*, lo cual es siempre verdadero sin importar la situación.

Ejercicio 3

Demuestra las propiedades anteriores.

Ejemplo 3

Mostremos la correctud del siguiente argumento conocido como *dilema constructivo simple:* $p \to r, \neg p \to r / \therefore r$.

1.	$\mathcal{I}(p \to r) = 1$	Hipótesis
2.	$\mathcal{I}(\neg p \to r) = 1$	Hipótesis
3.	$\mathcal{I}(r) = 0$	Refutación
4.	$\mathcal{I}(p) = 0$	Por 1 y 3
5.	$\mathcal{I}(r) = 1$	Por 1 y 4, pero causa una constradicción con 3.

Por lo tanto el argumento es correcto.

4. Algunos Argumentos Correctos

- ⋆ Modus Ponens

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}$$

- ⋆ Modus Tollens

$$\frac{\neg\psi \qquad \varphi \to \neg\psi}{\neg\varphi}$$

- ⋆ Silogismo hipótetico

$$\frac{\varphi \to \psi \qquad \psi \to \chi}{\varphi \to \chi}$$

- ⋆ Prueba por casos

$$\frac{\varphi \to \chi \qquad \psi \to \chi}{\varphi \vee \psi \to \chi}$$

- ⋆ Introducción del $\wedge$

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}$$

⋆ Eliminación del $\wedge$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$$

⋆ Eliminación del $\wedge$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

⋆ Introducción del $\vee$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$$

⋆ Introducción del $\vee$

$$\frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$$

⋆ Resolución binaria

$$\frac{\varphi \vee \psi \qquad \neg\psi \vee \chi}{\varphi \vee \chi}$$

⋆ Dilema constructivo

$$\frac{\varphi \to \psi_1 \qquad \chi \to \psi_2 \qquad \varphi \vee \chi}{\psi_1 \vee \psi_2}$$

⋆ Dilema destructivo

$$\frac{\varphi \to \psi_1 \qquad \chi \to \psi_2 \qquad \neg\psi_1 \vee \neg\psi_2}{\neg\varphi \vee \neg\chi}$$

5. Automatización

Los métodos semánticos, como la verificación mediante fórmula asociada o la consecuencia lógica, son herramientas fundamentales para garantizar la corrección de un argumento en lógica proposicional. Sin embargo, su automatización es compleja, ya que requieren evaluar todas las posibles interpretaciones de las premisas para verificar si la conclusión siempre se cumple. Dado que el número de interpretaciones crece exponencialmente con el número de variables proposicionales, este enfoque se vuelve ineficiente en problemas grandes. Además, en muchos casos, encontrar un contraejemplo requiere explorar todas las combinaciones de valores de verdad, lo que hace que la verificación manual o computacional sea costosa.

Para abordar este problema, en la siguiente nota exploraremos un método sintáctico bastante famoso conocido como resolución binaria, el cual permite derivar conclusiones de manera más eficiente sin necesidad de analizar todas las interpretaciones posibles. Este enfoque es esencial en la automatización del razonamiento lógico y se utiliza en sistemas como los solucionadores SAT, que resuelven problemas de satisfacibilidad de manera eficiente mediante reglas de inferencia en lugar de evaluar exhaustivamente todas las posibilidades.

Aunque, si bien es complicado definir el análisis de un argumento, es posible automatizar otros elementos, como la relación de consecuencia lógica.

```
consecuencia :: [LProp] -> LProp -> Bool
```

6. Conclusión

En esta nota, hemos explorado los conceptos fundamentales para el análisis de argumentos en lógica proposicional, estableciendo criterios formales para determinar su corrección. A través de la noción de fórmula asociada y consecuencia lógica, hemos visto dos enfoques para verificar la validez de un argumento. Asimismo, analizamos propiedades clave de la relación de consecuencia lógica, las cuales proporcionan una base teórica sólida para la formalización y automatización del razonamiento. Estos principios son esenciales no solo para la lógica teórica, sino también para aplicaciones prácticas en inteligencia artificial, verificación de software y sistemas automatizados de razonamiento.

Sin embargo, la verificación semántica de argumentos presenta dificultades computacionales debido al crecimiento exponencial del número de interpretaciones posibles. Por ello, en la siguiente nota introduciremos el método de resolución binaria, una técnica sintáctica que facilita la automatización del proceso de deducción sin necesidad de evaluar todas las interpretaciones. Este método, ampliamente utilizado en la resolución de problemas de satisfacibilidad (SAT), constituye un paso fundamental hacia la optimización del razonamiento lógico automatizado.

Referencias

[1] Miranda Perea, F. E., Reyes, A. L., González, L. del C., & Linares, S. (2018). *Lógica Computacional: Notas de clase.* Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México.

[2] Loyola Cruz, L. F. (2023). *Manual de Prácticas para la Asignatura de Lógica Computacional* (Proyecto de Apoyo a la Docencia). Universidad Nacional Autónoma de México.

[3] Enderton, H. B. (2001). *A Mathematical Introduction to Logic* (2nd ed.). Elsevier.

[4] Russell, G., & Restall, G. (2010). *Logic: Key Concepts in Philosophy.* Bloomsbury Publishing.

[5] Smith, P. (2020). *An Introduction to Formal Logic* (2nd ed.). Cambridge University Press.

[6] Chiswell, I., & Hodges, W. (2007). *Mathematical Logic.* Oxford University Press.

[7] Blackburn, P., de Rijke, M., & Venema, Y. (2001). *Modal Logic.* Cambridge University Press.