Lógica Computacional, 2025-2
Unidad 3: Lógica de Predicados

Semántica

Manuel Soto Romero   Luis Fernando Loyola Cruz

10 de mayo de 2025
Facultad de Ciencias UNAM

Esta nota de clase tiene como objetivo brindar una introducción clara, rigurosa y progresiva a la semántica de la lógica de predicados, un componente importante dentro del curso de Lógica Computacional. Partimos de una motivación informal para desarrollar una intuición sólida sobre cómo se interpreta el significado de fórmulas en distintos dominios. Posteriormente, formalizamos las nociones fundamentales: universo de discurso, interpretación, estado, evaluación de términos y fórmulas, así como las ideas más relevantes como verdad, falsedad, satisfacibilidad y validez universal. Además, se incluyen ejemplos ilustrativos y una comparación explícita con la lógica proposicional para resaltar las diferencias conceptuales. Finalmente, se incorpora una sección de automatización que muestra cómo estas ideas pueden implementarse en un lenguaje funcional como Haskell, permitiendo conectar el estudio teórico con herramientas prácticas de verificación lógica. Espero que esta nota les sirva como una guía útil para el estudio individual y como base para nuestras futuras discusiones en clase.

1. Introducción

Una vez descrita en detalle la sintaxis de los lenguajes de primer orden, procederemos al estudio de su semántica, la cual resulta más compleja que la de la lógica proposicional debido a su mayor expresividad. Esto se debe a la presencia de dos categorías distintas: la categoría de individuos, representada por los términos, y la categoría de propiedades o relaciones entre individuos, representada por los predicados.

Más aún, en la lógica de primer orden, la verdad de una fórmula no queda determinada únicamente por una interpretación fija del lenguaje (como ocurre en la lógica proposicional), sino que depende de los valores que toman los términos, los cuales a su vez están determinados por el universo del discurso considerado. Este universo será un conjunto no vacío al que habremos de referirnos para otorgar significado a las fórmulas.

Finalmente, cabe señalar que una fórmula en la lógica de primer orden no es necesariamente verdadera o falsa en un mundo dado, a diferencia de lo que sucede en la lógica proposicional. En particular, que una fórmula no sea verdadera no implica necesariamente que sea falsa.

Antes de comenzar con el estudio formal de la semántica, revisaremos algunos ejemplos de manera informal.

2. Semántica Informal

En esta sección presentaremos algunas ideas generales sobre la semántica de la lógica de predicados. Lo haremos de manera informal con el objetivo de ganar intuición, y más adelante abordaremos su formalización rigurosa.

Dominios de Interpretación

Antes de poder determinar cuándo una fórmula es verdadera, necesitamos introducir el concepto de universo de discurso, el cual se formaliza mediante un dominio de interpretación. Este dominio es un conjunto no vacío sobre el que se definen matemáticamente los significados de los símbolos utilizados en las especificaciones formales: constantes, funciones y predicados.

En este marco, cada símbolo de constante se asocia a un individuo del dominio; los símbolos de función corresponden a operadores que toman uno o más elementos del dominio y devuelven otro elemento del mismo; mientras que los predicados representan relaciones entre individuos y devuelven un valor de verdad (verdadero o falso).

Ejemplo 1

Pensemos en un universo basado en conceptos matemáticos elementales:

- ⋆ **Individuos:** Objetos como el número cero, el uno, el dos, y así sucesivamente.
- ⋆ **Funciones:** Operaciones como *siguiente*, que asocia su sucesor, o *doble*, que devuelve el doble de un número dado.
- ⋆ **Predicados:** Propiedades como *EsPar(x)*, *EsImpar(x)* o *EsMultiploDeTres(x)*, que nos permiten afirmar si un número cumple con ciertas características.

Ejemplo 2

Ahora consideremos un universo que representa una pequeña comunidad educativa:

- ⋆ **Individuos:** Personas que forman parte de esa comunidad, como estudiantes, docentes y personal adiministrativo.
- ⋆ **Funciones:** Acciones como *asignarCurso*, que relaciona a una persona docente con un grupo, o *registrarEvaluacion*, que asocia a una persona estudiante con una calificación.
- ⋆ **Predicados:** Relaciones como *EsEstudiante(x)*,*EsDocente(x)*,*HaAprobado(x)*, que describen propiedades o estados de los individuos.

Noción Informal de Verdad

Cuando el dominio de interpretación (es decir, el universo de discurso) es finito, es posible asignar valores de verdadero o falso a cada predicado examinando todas las combinaciones posibles de individuos en ese universo. Por ejemplo, si consideramos el predicado $Mayor(x, y)$ y nuestro universo está formado por los números 1, 2, 3 y 4, podemos construir una tabla que indique, para cada pareja de individuos, si la relación $Mayor$ se cumple o no.

A continuación se muestra dicha tabla. En cada celda se indica con 1 si la relación $Mayor(x, y)$ es verdadera (es decir, si x es mayor que y), y con 0 si es falsa:

Mayor	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	1	0	0	0
3	1	1	0	0
4	1	1	1	0

Como se observa, podemos verificar directamente qué pares satisfacen la relación. Sin embargo, esto se vuelve más complicado cuando el universo crece. Si, por ejemplo, consideramos los números del 1 al 100, la tabla necesaria sería mucho más extensa. Y si el universo incluye a todos los números naturales, construir dicha tabla sería imposible, ya que implicaría un número infinito de filas y columnas.

Cuando un predicado tiene aridad uno o dos y el universo es finito, aún podemos visualizar su interpretación mediante una tabla. Sin embargo, si el predicado tiene aridad tres o más, incluso con un universo pequeño, la cantidad de combinaciones posibles crece rápidamente y resulta difícil representarlas todas. Por esta razón, el uso de tablas de verdad (útiles en lógica proposicional) resulta inadecuado en lógica de predicados.

Esto no debería sorprendernos: la noción de verdad en lógica de predicados es mucho más compleja, ya que depende del universo de discurso que estemos considerando. En lógica proposicional, el universo se reduce a los valores Verdadero y Falso. En cambio, en lógica de predicados, el universo de discurso puede contener literalmente cualquier tipo de entidad: números, conjuntos, piedras, flores, árboles, palabras, galaxias, etc. Así, el valor de verdad de una fórmula dependerá siempre del universo de discurso que hayamos fijado, y al cambiar dicho universo, el valor de verdad de la fórmula también puede cambiar.

Definición 1. (Verdad en Lógica de Predicados)

*Sea φ una fórmua de la lógica de predicados y sea $\mathcal{U}$ un universo de discurso determinado. Diremos que φ es **verdadera en $\mathcal{U}$** si se cumplen las siguientes condiciones, de acuerdo con su estructura sintáctica:*

- ⋆ *Si φ es una **fórmula atómica**, de la forma $P(t_1, \ldots, t_n)$, entonces φ es verdadera en $\mathcal{U}$ si (al interpretar los términos $t_1, \ldots, t_n$ como individuos del universo) la tupla de valores obtenida pertenece a la relación asociada al predicado P dentro de $\mathcal{U}$.*
- ⋆ *Si φ es una **fórmula compuesta mediante conectivos lógicos** ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, evaluamos su valor de verdad utilizando las mismas reglas que en la lógica proposicional, considerando los valores de verdad de sus subfórmulas.*
- ⋆ *Si φ es una **fórmula universal**, de la forma $\forall x\psi$, entonces φ es verdadera en $\mathcal{U}$ si ψ resulta verdadera para **todos** los posibles valores que x puede tomar en el universo.*
- ⋆ *Si φ es una **fórmula existencial**, de la forma $\exists x\psi$, entonces φ es verdadera en $\mathcal{U}$ si existe **al menos** un valor de x en el universo para el cual ψ sea verdadera.*

Esta definición nos da una idea de cómo asignar un valor de verdad a una fórmula de la lógica de predicados a partir de su forma y del universo de discurso en el que se evalúa. A diferencia de la lógica proposicional (donde una proposición es simplemente verdadera o falsa), en la lógica de predicados la verdad depende de cómo se interpreten los términos, funciones, predicados y cuantificadores dentro de un dominio concreto. Así, una misma fórmula puede ser verdadera en un universo y falsa en otro, dependiendo de los individuos presentes y de cómo estén definidas las relaciones entre ellos.

Cabe señalar que esta definición es aún informal. En particular, cuando el universo de discurso es infinito, no está claro en general cómo verificar que una fórmula universal de la forma $\forall x\psi$ sea verdadera, ya que no es posible revisar caso por caso todos los valores posibles de x. Por ello, más adelante será necesario introducir una definición formal de interpretación que nos permita manejar estos casos de manera rigurosa.

Verdad en Micromundos

En el contexto de la Inteligencia Artificial, un micromundo es un modelo deliberadamente simplificado de una situación del mundo real. Por ejemplo, si se desea programar un robot para que mueva objetos de forma inteligente, no es necesario considerar las dimensiones físicas exactas ni la cantidad total de objetos existentes. En su lugar, se puede trabajar con una idealización del entorno, que incluya solo unos cuantos objetos y acciones posibles.

A continuación se presentan algunas descripciones correspondientes a un micromundo de este tipo, junto con la manera en que se puede determinar la verdad de ciertas fórmulas dentro de dicho entorno. Llamaremos a éste el Micromundo de Wumpus.

En este micromundo, el entorno se representa como un tablero de dos dimensiones formado por casillas. Cada casilla puede contener distintos elementos como pozos, un tesoro, el temido Wumpus o el aventurero, o bien puede estar libre. Además, algunas casillas pueden presentar señales perceptibles como viento o hedor, las cuales ofrecen pistas indirectas sobre la presencia de pozos o del Wumpus en casillas adyacentes.

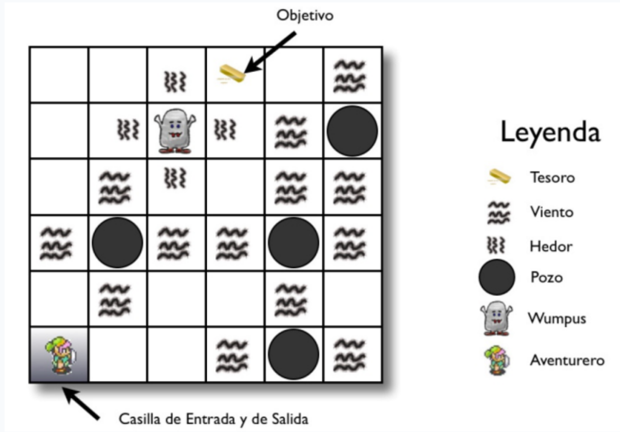
Para modelar este entorno en lógica de predicados, utilizamos los siguientes predicados:

- ⋆ $A(x, y)$: el aventurero se encuentra en la casilla con coordenadas (x, y).
- ⋆ $W(x, y)$: el Wumpus está en la casilla (x, y).
- ⋆ $T(x, y)$: el tesoro se encuentra en la casilla (x, y).
- ⋆ $P(x, y)$: hay un pozo en la casilla (x, y).
- ⋆ $V(x, y)$: hay viento en la casilla (x, y), lo cual indica que hay un pozo en alguna casilla adyacente.
- ⋆ $H(x, y)$: hay hedor en la casilla (x, y), lo cual indica que el Wumpus se encuentra en una casilla adyacente.
- ⋆ $L(x, y)$: la casilla (x, y) está libre, es decir, no contiene ninguno de los elementos anteriores.

En este entorno, la noción de verdad de una fórmula depende del contenido de cada casilla en el tablero, es decir, del universo de discurso que se haya definido. A continuación se mostrarán algunas especificaciones de este micromundo junto con el análisis de su valor de verdad.

Ejemplo 3

Nos referimos al siguiente micromundo:



Queremos ahora determinar la **verdad** de algunas fórmulas en este micromundo.

- La casilla (0,0) está libre:

$$L(0,0)$$

  Verdadero. No se perciben señales (hedor o viento) ni se reporta la presencia del Wumpus ni de un pozo. Por tanto, la casilla (0,0) se considera libre.

- Si hay viento en una casilla, entonces hay un pozo en alguna casilla adyacente:

$$\forall x \forall y\, (V(x,y) \to P(x+1,y) \vee P(x-1,y) \vee P(x,y+1) \vee P(x,y-1))$$

  Verdadero. Todas las casillas con viento contienen un pozo (según la tabla). Por tanto, en este micromundo la fórmula se cumple.

- Si no hay hedor en una casilla, entonces el Wumpus no está en ninguna de sus casillas vecinas:

$$\forall x \forall y\, (\neg H(x,y) \to \neg W(x+1,y) \wedge \neg W(x-1,y) \wedge \neg W(x,y+1) \wedge \neg W(x,y-1))$$

  Verdadero. Todas las casillas en las que no se percibe hedor no tienen al Wumpus en sus vecindades, al menos según la información del micromundo. La implicación se cumple para todos los casos conocidos.

3. Semántica Formal

Definición 2. (Interpretación)

*Sea $\mathcal{L} = \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ una signatura de primer orden, compuesta por símbolos de predicado, función y constante. Una **interpretación** para $\mathcal{L}$ es un par ordenado $\mathcal{M} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{I} \rangle$ donde:*

- *$\mathcal{U} \neq \varnothing$ es un conjunto no vacío, llamado **universo de discurso**, que contiene los objetos sobre los que se hablará.*

> ⋆ *$\mathcal{I}$ es una función que asigna significado a cada símbolo de la signatura $\mathcal{L}$, de acuerdo con las siguientes reglas:*
>
> ∗ *Para todo símbolo de predicado $P^{(m)} \in \mathcal{P}$, su interpretación $\mathcal{I}(P)$ es una función que asigna un valor de verdad (Verdadero o Falso) a cada m-tupla de elementos del universo:*
>
> $$\mathcal{I}(\mathcal{P}) : \mathcal{U}^m \to \mathbb{B}$$
>
> ∗ *Para todo símbolo de función $f^{(n)} \in \mathcal{F}$, su interpretación $\mathcal{I}(f)$ es una función que toma una n-tupla de elementos del universo y devuelve un nuevo elemento del mismo universo:*
>
> $$\mathcal{I}(\mathcal{F}) : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$$
>
> ∗ *Para cada símbolo de constante $c \in \mathcal{C}$, su interpretación es simplemente un objeto del universo:*
>
> $$\mathcal{I}(\mathcal{C}) \in \mathcal{U}$$
>
> *Cuando un par $\mathcal{M} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{I} \rangle$ cumple con lo anterior, decimos que $\mathcal{M}$ es una* ***interpretación de $\mathcal{L}$****, o también una* ***$\mathcal{L}$-interpretación****. En algunos contextos, también se le llama* ***modelo****.*

Esta definición formal nos dice cómo dar significado a las fórmulas de la lógica de predicados. A diferencia de la lógica proposicional, donde sólo nos interesa si una proposición es verdadera o falsa, en lógica de predicados hablamos de individuos, funciones que actúan sobre ellos, y relaciones que pueden cumplirse o no entre tales individuos.

Por ello, necesitamos:

- ⋆ Un universo que contenga todos los objetos sobre los que vamos a razonar (por ejemplo, los números naturales, personas, ciudades, etc.).
- ⋆ Una función de interpretación que nos diga qué significa cada símbolo del lenguaje dentro de ese universo:
  - ∗ Los predicados nos permiten hablar de propiedades o relaciones: por ejemplo, el predicado $Mayor(x, y)$ podría interpretarse como la relación “x es mayor que y”.
  - ∗ Las funciones nos permiten construir nuevos objetos a partir de otros: por ejemplo, $doble(x)$ podría devolver el número que es el doble de x.
  - ∗ Las constantes nombran objetos específicos del universo: como el número 0 o una persona llamada “Juan”.

Con esta maquinaria, podemos finalmente evaluar si una fórmula es verdadera o falsa en un mundo dado, es decir, en una interpretación concreta. La misma fórmula puede ser verdadera en una interpretación y falsa en otra. Esto es lo que hace que el estudio de la lógica de primer orden sea tan expresivo y poderoso.

Interpretación de Términos

Dado que las variables en lógica de predicados pueden tomar distintos valores del universo de discurso, necesitamos un mecanismo que asocie a cada variable un elemento concreto del universo. A esto le llamamos estado.

Definición 3. (Estado)

*Un **estado de las variables** es una función $\sigma : \texttt{Var} \to \mathcal{U}$ que asigna a cada variable un valor dentro del universo $\mathcal{U}$.*

En muchos casos es necesario actualizar el valor que una variable toma dentro de un estado, por ejemplo, al evaluar una fórmula con cuantificadores. Para ello definimos el concepto de estado modificado.

Definición 4. (Estado modificado)

*Sea $\sigma : \texttt{Var} \to \mathcal{U}$ un estado. Dados nombres de variables $x_1, \ldots, x_n$ y elementos del universo $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{U}$, definimos el estado **modificado** denotado $\sigma[x_1, \ldots, x_n/u_1, \ldots, u_n]$, o simplemente $\sigma[\vec{x}/\vec{u}]$, como la función:*

$$\sigma[\vec{x}/\vec{u}](y) = \begin{cases} u_i & \text{si } y = x_i \text{ para algún } i \in \{1, \ldots, n\}, \\ \sigma(y) & \text{si } y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}. \end{cases}$$

Es decir, el nuevo estado coincide con el anterior salvo en las variables modificadas explícitamente.

Para asignar significado a los términos de un lenguaje de primer orden (que pueden ser variables, constantes o aplicaciones de funciones) necesitamos definir cómo se evalúan en un estado dado.

Definición 5. (Interpretación de términos)

*Dado un estado σ, definimos la función de **evaluación de términos** respecto a σ como $\mathcal{I}_\sigma : \texttt{TERM} \to \mathcal{U}$, según las siguientes reglas:*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\sigma(x) &= \sigma(x) && \text{si } x \text{ es una variable,} \\ \mathcal{I}_\sigma(c) &= \mathcal{I}(c) && \text{si } c \text{ es una constante,} \\ \mathcal{I}_\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) &= \mathcal{I}(f)\,(\mathcal{I}_\sigma(t_1), \ldots, \mathcal{I}_\sigma(t_n)) && \text{si } f \text{ es un símbolo de función.} \end{aligned}$$

Estas tres definiciones nos permiten interpretar los términos de un lenguaje de primer orden en estados (contextos) concretos, lo cual es esencial para evaluar fórmulas con sentido. A saber:

- ⋆ Un estado es como una memoria que guarda los valores actuales de las variables.
- ⋆ El estado modificado es una nueva memoria que cambia el valor de algunas variables, útil para tratar con cuantificadores como $\forall x$ o $\exists x$.
- ⋆ Finalmente, la interpretación de términos nos dice qué valor tiene una expresión como $f(c)$ o $f(x, y)$ dependiendo del estado actual y de la interpretación de los símbolos de la signatura.

Ejemplo 4

Supongamos el siguiente universo de discurso:

$$\mathcal{U} = \{a, b, c\}$$

Y consideremos la siguiente signatura:

- ⋆ Constantes: $\mathcal{C} = \{c_1\}$, donde $\mathcal{I}(c_1) = b$
- ⋆ Funciones: $\mathcal{F} = \{f^{(1)}\}$, donde $\mathcal{I}(f)(x) =$ el siguiente elemento en el orden $a \to b \to c \to a$
- ⋆ Variables: $\texttt{Var} = \{x, y\}$

Paso 1: Estado inicial.
Definimos un estado σ tal que:

$$\sigma(x) = a, \quad \sigma(y) = c$$

Paso 2: Estado modificado.
Construimos un nuevo estado σ' modificando el valor de la variable x por b:

$$\sigma' = \sigma[x/b] \Rightarrow \sigma'(x) = b, \quad \sigma'(y) = \sigma(y) = c$$

Paso 3: Interpretación de términos.
Ahora evaluamos el término $f(x)$ bajo los estados σ y σ'.

- ⋆ Bajo σ:

$$\mathcal{I}_\sigma(f(x)) = \mathcal{I}(f)(\mathcal{I}_\sigma(x)) = \mathcal{I}(f)(a) = b$$

- ⋆ Bajo σ':

$$\mathcal{I}_{\sigma'}(f(x)) = \mathcal{I}(f)(\mathcal{I}_{\sigma'}(x)) = \mathcal{I}(f)(b) = c$$

Este ejemplo muestra cómo la interpretación de un término depende no solo de la función que representa, sino también del estado de las variables al momento de la evaluación.

Interpretación de fórmulas

Definición 6. (Interpretación de fórmulas)

Sea $\sigma : \texttt{Var} \to \mathcal{U}$ un estado. Definimos la función de interpretación de fórmulas respecto a σ, denotada $\mathcal{I}_\sigma : \mathsf{LPred} \to \mathbb{B}$, de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_\sigma(\bot) &= 0 \\
\mathcal{I}_\sigma(\top) &= 1 \\
\mathcal{I}_\sigma(P(t_1,\ldots,t_n)) &= \mathcal{I}(P)(\mathcal{I}_\sigma(t_1),\ldots,\mathcal{I}_\sigma(t_n)) \\
\mathcal{I}_\sigma(\neg\varphi) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 0 \\ 0 & \text{si } \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 1 \end{cases} \\
\mathcal{I}_\sigma(\varphi \vee \psi) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
\mathcal{I}_\sigma(\varphi \wedge \psi) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
\mathcal{I}_\sigma(\varphi \to \psi) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 1, \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
\mathcal{I}_\sigma(\varphi \leftrightarrow \psi) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\psi) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
\mathcal{I}_\sigma(\forall x\varphi) = 1 &\quad \text{syss } \mathcal{I}_{\sigma[x/u]}(\varphi) = 1 \text{ para todo } u \in \mathcal{U} \\
\mathcal{I}_\sigma(\exists x\varphi) = 1 &\quad \text{syss existe } u \in \mathcal{U} \text{ tal que } \mathcal{I}_{\sigma[x/u]}(\varphi) = 1
\end{aligned}
$$

Esta definición explica cómo se evalúa si una fórmula de la lógica de predicados es verdadera o falsa bajo una interpretación y un estado específico.

- ⋆ Para fórmulas atómicas, como $P(x)$, se interpreta cada término y se consulta el predicado o se compara el valor de los términos.
- ⋆ Los conectivos lógicos ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$) se interpretan igual que en lógica proposicional, pero usando los valores de verdad que surgen de la interpretación semántica.
- ⋆ Lo más importante es entender cómo se evalúan las fórmulas con cuantificadores:
  - ∗ En $\forall x\varphi$, se modifica el estado para asignar a x cada posible valor del universo, y se revisa que φ sea verdadera en todos los casos.
  - ∗ En $\exists x\varphi$, basta encontrar un solo valor del universo que haga verdadera a φ con ese valor asignado a x.

Ejemplo 6

Supongamos la siguiente configuración:

- ⋆ Universo del discurso: $\mathcal{U} = \{0, 1, 2\}$
- ⋆ Constante: c tal que $\mathcal{I}(c) = 1$
- ⋆ Función unaria: s tal que $\mathcal{I}(s)(x) = x + 1$
- ⋆ Predicado binario: $P(x, y)$ tal que $\mathcal{I}(P)(x, y) = 1$ ssi $x < y$
- ⋆ Estado inicial: $\sigma(x) = 0$, $\sigma(y) = 2$

Queremos evaluar la fórmula:

$$\varphi = \exists x\, P(s(x), c)$$

Para ello, usamos la interpretación existencial:

$$\mathcal{I}_\sigma(\exists x\, \psi) = 1 \text{ ssi existe } u \in \mathcal{U} \text{ tal que } \mathcal{I}_{\sigma[x/u]}(\psi) = 1$$

En este caso, $\psi = P(s(x), c)$ y probamos todos los valores posibles para x:

- ⋆ Para $x = 0$:
$$s(x) = 1, \quad c = 1, \quad P(1,1) = 0$$
- ⋆ Para $x = 1$:
$$s(x) = 2, \quad c = 1, \quad P(2,1) = 0$$
- ⋆ Para $x = 2$:
$$s(x) = 3, \quad c = 1, \quad P(3,1) = 0$$

En todos los casos, la fórmula $P(s(x), c)$ resulta falsa. Por tanto:

$$\mathcal{I}_\sigma(\exists x\, P(s(x), c)) = 0$$

Verdad, falsedad y validez universal

Definición 7. (Satisfacibilidad y verdad en una interpretación)

Sea φ una fórmula de la lógica de predicados y sea $\mathcal{M} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{I} \rangle$ una interpretación.

- ⋆ *Decimos que φ es **satisfacible en** $\mathcal{M}$ si existe al menos un estado σ tal que $\mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 1$. Esto se denota: $\mathcal{M} \vDash_\sigma \varphi$.*
- ⋆ *Decimos que φ es **verdadera en** $\mathcal{M}$ si **para todo estado** σ se cumple que $\mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 1$. En este caso, escribimos $\mathcal{M} \vDash \varphi$ y decimos que $\mathcal{M}$ **es un modelo de** φ.*

Ejemplo 7

$$\exists x(\mathit{Estudiante}(x) \land \mathit{TomaCurso}(x, \mathit{Lógica}))$$

En una universidad con los individuos Ana, Bruno y Carla sabemos que Ana y Bruno son estudiantes, y *sólo Ana toma Lógica*. La fórmula dice: *Existe alguien que es estudiante y toma Lógica*. Esto es **satisfacible** porque Ana cumple la condición (hay al menos un caso donde la fórmula es verdadera).

Ejemplo 8

$$\forall x(\mathit{Gato}(x) \rightarrow \mathit{Mamifero}(x))$$

En un zoológico con los individuso Pelusa (una gatita), Leo (un león) y Nemo (un pez) se ha definido que Pelusa es un gato y también un mamífero, los demás no son gatos. La fórmula afirma que *Todo* *gato es mamífero*. Como el único gato es Pelusa y ella sí es mamífera, y los demás no son gatos (por lo que no afectan la implicación, la fórmula es **verdadera en esta interpretación** (todos los casos posibles la hacen verdadera).

Definición 8. (Falsedad)

Sea $\mathcal{M} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{I} \rangle$ una interpretación y sea φ una fórmula.

Decimos que φ ***es falsa*** *en $\mathcal{M}$ si y sólo si su negación $\neg\varphi$ es verdadera en $\mathcal{M}$. Es decir:*

$$\mathcal{M} \vDash \neg\varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \varphi \text{ es falsa en } \mathcal{M}$$

Observacion 1

¡Cuidado! Si una fórmula no es verdadera en $\mathcal{M}$, eso NO implica que sea falsa. Puede ocurrir que no sea verdadera ni falsa (por ejemplo, cuando es satisfacible en un estado y falsa en otro).

Ejemplo 9

Consideremos la fórmula:

$$\varphi = \forall x\,(Humano(x) \to TienePasaporte(x))$$

Esta fórmula afirma que *"toda persona tiene pasaporte"*.

Supongamos la siguiente interpretación:

- ⋆ Universo: $\{a, b\}$
- ⋆ $\mathcal{I}(Humano) = \{a\}$ (solo a es humano)
- ⋆ $\mathcal{I}(TienePasaporte) = \{a\}$ (solo a tiene pasaporte)
- ⋆ No sabemos si b es humano o si tiene pasaporte.

¿Es verdadera la fórmula?

- ⋆ Para $x = a$: $Humano(a)$ y $TienePasaporte(a)$ son verdaderos, por lo que la implicación se cumple.
- ⋆ Para $x = b$: No sabemos si $Humano(b)$ es verdadero o falso.
  - ∗ Si $Humano(b)$ es falso, entonces la implicación se cumple.
  - ∗ Si $Humano(b)$ es verdadero pero $TienePasaporte(b)$ es falso, entonces la implicación falla.

Dado que no tenemos suficiente información sobre b, **no podemos asegurar que la fórmula sea verdadera** en esta interpretación.

¿Es falsa la fórmula?

Para que sea falsa, su negación debe ser verdadera:

$$\neg\varphi = \exists x\,(Humano(x) \land \neg TienePasaporte(x))$$

Esta dice que *"existe una persona que no tiene pasaporte"*.

Pero:

- ⋆ a sí tiene pasaporte.

⋆ No sabemos si b es humano ni si tiene pasaporte.

Por lo tanto, **tampoco podemos asegurar que la fórmula sea falsa**.

Conclusión: La fórmula φ *no es verdadera*, pero *tampoco es falsa*. Esto muestra que en lógica de predicados, **no ser verdadera no implica ser falsa**.

Definición 9. (Validez universal)

Una fórmula φ es ***universalmente válida*** *si es verdadera en toda interpretación (sin importar el universo, funciones o predicados).*

Se denota:

$$\models \varphi$$

Este concepto generaliza el de tautología en la lógica proposicional.

Ejemplo 10

Consideremos la fórmula:

$$\varphi = \forall x\,(x = x)$$

Esta fórmula afirma que *"todo objeto es igual a sí mismo"*.

Sea cual sea el universo de discurso que elijamos (números, personas, colores, conjuntos, gatos, etc.) y sin importar cómo definamos la interpretación, siempre se cumplirá que cada elemento es igual a sí mismo.

Por lo tanto, la fórmula es verdadera en cualquier interpretación posible. Es decir:

$$\models \forall x\,(x = x)$$

Conclusión: La fórmula es *universalmente válida*, pues es verdadera en todas las interpretaciones. Es un ejemplo típico de lo que en lógica proposicional sería una *tautología*.

Concepto	**Significado**	**Notación**
Satisfactibilidad en una interpretación	Existe **al menos un estado** de las variables en el que la fórmula es verdadera.	$\mathcal{M} \models_\sigma \varphi$
Verdad en una interpretación	La fórmula es verdadera **en todos los estados posibles** para esa interpretación.	$\mathcal{M} \models \varphi$
Falsedad en una interpretación	La **negación de la fórmula** es verdadera en todos los estados posibles.	$\mathcal{M} \models \neg\varphi$
Validez universal	La fórmula es verdadera **en todas las interpretaciones posibles**.	$\models \varphi$

4. Automatización

Los conceptos semánticos desarrollados en esta nota pueden representarse de forma precisa y ejecutable en un lenguaje funcional como Haskell. A continuación mostramos la estructura general que modela la semántica de la lógica de predicados, de acuerdo con las definiciones formales que hemos estudiado:

- ⋆ El concepto de estado como función $\sigma : \texttt{Var} \to \mathcal{U}$ se representa como una lista de pares de nombre de variable y término.
- ⋆ El universo es simplemente una lista de términos (constantes) que representan los objetos sobre los que se cuantifica.
- ⋆ La interpretación agrupa todas las funciones necesarias para asignar significado a predicados, funciones y constantes, tal como definimos formalmente a $\mathcal{M} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{I} \rangle$.
- ⋆ Se definen funciones para evaluar términos ($\mathcal{I}_\sigma(t)$), fórmulas ($\mathcal{I}_\sigma(\varphi)$), y verificar propiedades como satisfactibilidad, verdad, falsedad y validez universal.

Estas herramientas permiten automatizar el razonamiento lógico, siendo útiles para desarrollar motores de inferencia, sistemas de verificación y asistentes de prueba.

```haskell
-- Estado: asignaci\'on de variables a elementos del universo
type Estado = [(String, Term)]

-- Universo: conjunto de términos "atómicos" permitidos (ej. constantes)
type Universo = [Term]

-- Interpretación de símbolos de predicado
type InterpPred = String -> [Term] -> Bool

-- Interpretación de símbolos de función
type InterpFunc = String -> [Term] -> Term

-- Interpretación general
data Interpretacion = Interp {
  universo :: Universo,
  interpPred :: InterpPred,
  interpFunc :: InterpFunc,
  interpConst :: String -> Term
}

-- Evaluación de términos bajo un estado y una interpretación
evalTerm :: Interpretacion -> Estado -> Term -> Term

-- Evaluación de fórmulas bajo un estado y una interpretación
evalFormula :: Interpretacion -> Estado -> Formula -> Bool

-- Modificación de estado: asignar valor a una o más variables
modificaEstado :: Estado -> [(String, Term)] -> Estado

-- Verifica satisfacibilidad: ¿hay algún estado que haga verdadera la
```

```
-- fórmula?
satisfacible :: Interpretacion -> Formula -> Bool

-- Verifica validez en interpretación: ¿es verdadera en todos los estados?
verdaderaEn :: Interpretacion -> Formula -> Bool

-- Verifica falsedad en interpretación
falsaEn :: Interpretacion -> Formula -> Bool

-- Verifica validez universal: ¿es verdadera en todas las interpretaciones
-- posibles?
validezUniversal :: Formula -> Bool
```

Estas definiciones permiten conectar de manera operativa y formal el contenido teórico presentado en esta unidad. Cada función implementa directamente alguna de las nociones centrales:

- `evalTerm` corresponde a la evaluación de términos según la Definición 5.
- `evalFormula` implementa la interpretación semántica de fórmulas, tal como se presenta en la Definición 6.
- `modificaEstado` modela la modificación de un estado, como en la Definición 4.
- `satisfacible`, `verdaderaEn` y `falsaEn` reflejan las definiciones de satisfacibilidad, verdad y falsedad en una interpretación (Definiciones 7 y 8).
- `validezUniversal` verifica la verdad de una fórmula en todas las interpretaciones posibles, como en la Definición 9.

Este modelo sirve como punto de partida para construir herramientas de verificación formal y demuestra cómo la lógica de predicados puede ser no sólo un objeto de estudio teórico, sino también una base sólida para la implementación de sistemas inteligentes.

5. Conclusión

En esta nota hemos desarrollado paso a paso la semántica de la lógica de predicados, mostrando cómo se asigna significado a los términos y fórmulas en un universo determinado mediante interpretaciones y estados. A partir de ejemplos intuitivos y formales, hemos visto que el valor de verdad de una fórmula depende no solo de su estructura sintáctica, sino también del contexto interpretativo en el que se evalúa. Esto contrasta con la lógica proposicional, donde el valor de una fórmula depende únicamente de una asignación de verdad a proposiciones atómicas.

Además, al traducir las nociones semánticas al lenguaje funcional Haskell, se mostró cómo estos conceptos pueden implementarse computacionalmente, abriendo la puerta al desarrollo de sistemas automatizados de verificación y razonamiento lógico. Esta conexión entre teoría y práctica subraya la importancia de comprender profundamente la semántica lógica como base para aplicaciones en inteligencia artificial, verificación formal y programación declarativa.

Referencias

[**1**] Miranda Perea, F. E., Reyes, A. L., González, L. del C., & Linares, S. (2018). *Lógica Computacional: Notas de clase.* Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México.

[**2**] Loyola Cruz, L. F. (2023). *Manual de Prácticas para la Asignatura de Lógica Computacional* (Proyecto de Apoyo a la Docencia). Universidad Nacional Autónoma de México.

[**3**] Reyes, A. L., & Reyes, R. (2021). *Proyecto de lógica de predicados: El juego de Wumpus.* Comité de certificación, UACM San Lorenzo.

[**4**] Enderton, H. B. (2001). *A Mathematical Introduction to Logic* (2nd ed.). Elsevier.

[**5**] Huth, M., & Ryan, M. (2004). *Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems* (2nd ed.). Cambridge University Press.

[**6**] Mendelson, E. (2015). *Introduction to Mathematical Logic* (6th ed.). CRC Press.

[**7**] Harrison, J. (2009). *Handbook of Practical Logic and Automated Reasoning. Cambridge University Press.*